# 球面に近い超曲面について (部分多様体と変分問題)



本宮, 寛爾

数理解析研究所講究録
154巻 1972年 30-36



# 球面に近い超曲面について

名工大 工　本宮寛爾

## §0. 序

$n+1$ 次元ユークリッド空間 $R^{n+1}$ の凸な閉超曲面の中で，球面を特徴ずけることがいくつか知られている。
その中の一つとして，次のことが成り立つ[1]。

凸な閉超曲面で，$K_{n-1}/K_n = r$ (定数) であるものは，半径 $r$ の球面である。こゝで，$K_{n-1}$ は $(n-1)$-平均曲率，$K_n$ はガウス曲率である。

そのとき，関数 $K_{n-1}/K_n$ の値が，どれ位，超曲面に影響を与えるかを考えよう。その一つとして，次のことが成り立つことを証明しよう。

定理. $M$ を $R^{n+1}$ の凸な閉超曲面とする $(n \geqq 2)$。$M$ 上の関数 $K_{n-1}/K_n$ が十分定数 $r$ に近いならば，$M$ は半径 $r$ の球面に近い，即ち，$M$ が半径が $r-\varepsilon$, $r+\varepsilon$ の同心球の間に含まれることがいえる。こゝで，$\varepsilon$ は関数 $K_{n-1}/K_n$ の値のとり方により，

小さくとれる。

D. Koutroufiotis は，[2] で $n=2$ のとき，即ち，卵形面の場合に証明している。

§1. 簡単のため，以下，考える多様体や写像は皆 $C^\infty$ 級とする。

$R^{n+1}$ を $n+1$ 次元ユークリッド空間とする。
連結な $n$ 次元多様体 $M$ とはめこみ $x: M \to R^{n+1}$ で超曲面が与えられる。これを $(M, x)$ で表わす。

$M$ を向きづけ可能とすると，$M$ の各点 $p$ に対して，$x(p)$ での一意的な単位法線ベクトル $\xi(p)$ が決まる。第1，第2基本形式 I，II は，

$$\mathrm{I} = dx \cdot dx \quad , \quad \mathrm{II} = -d\xi \cdot dx$$

で与えられる。第2基本形式 II の第1基本形式 I に関する固有値，即ち，主曲率を $k_1, \cdots\cdots, k_n$ とおく。$l$-平均曲率 $(1 \leqq l \leqq n)$ は，

$$\binom{n}{l} K_l = \sum_{i_1 < \cdots < i_l} k_{i_1} \cdots\cdots k_{i_l}$$

で与えられる。特に，$K_n = k_1 \cdots\cdots k_n$ をガウス曲率という。

これからは，凸な閉超曲面（即ち，コンパクトで，ガウス曲率が $M$ 上いたるところ 0 でないもの）を考え，法線ベクトル $\xi$ は，内部へ向かうものをとることにする。

$S^n$ を $R^{n+1}$ の中の単位球面とする。$g_0$ を $S^n$ 上の $R^{n+1}$ から

導かれる自然なリーマン計量とする。

ガウス曲率 $K_n$ が M 上いたるところ 0 でないから，球面表示 $\xi : M \longrightarrow S^n$ は，微分同型写像である。

$$S^n \xrightarrow[\xi^{-1}]{} M \xrightarrow[x]{} R^{n+1}$$

$X = x \circ \xi^{-1}$ とおく。

以下，超曲面は $(S^n, X)$ で考える。

そのとき，超曲面 $(S^n, X)$ の $l$-平均曲率 $\widehat{K}_l$ と超曲面 $(M, x)$ の $l$-平均曲率 $K_l$ は，次の関係がある。

$$\widehat{K}_l(\nu) = K_l(\xi^{-1}(\nu)) \quad , \quad \nu \in S^n .$$

従って，簡単のため，$\widehat{K}_l(\nu)$ を同じ文字 $K_l(\nu)$ で表わす。

次に，超曲面 $(S^n, X)$ の支持関数 $\varphi$ を

$$\varphi(\nu) = -X(\nu) \cdot \nu \quad , \quad \nu \in S^n$$

で定義する。 こゝで，$\cdot$ は $R^{n+1}$ の中の内積を表わす。

そのとき，支持関数 $\varphi$ は次の微分方程式を満たす。

$$(1,1) \qquad \Delta\varphi + n\varphi = n\, K_{n-1}/K_n$$

こゝで，$\Delta$ は $S^n$ のリーマン計量 $g_0$ に関する Laplace-Beltrami 作用素である。

実際，$\{X_1, \cdots, X_n\}$ を接空間 $T_\nu(S^n)$ の正規直交底とし，H を第 2 基本形式 II に対応する (1,1) 型の対称テンソル場とする。

そのとき，

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{X_i}\nabla_{X_i}\varphi = -\sum \nabla_{X_i}X\cdot\nabla_{X_i}\nu - X\cdot\sum\nabla_{X_i}\nabla_{X_i}\nu$$
$$= \sum \nabla_{H^{-1}X_i}\nu\cdot\nabla_{X_i}\nu - X\cdot\Delta\nu = \sum g_0(H^{-1}X_i, X_i) + n\,X\cdot\nu$$
$$= \mathrm{Trace}\,H^{-1} - n\varphi = n\,K_{n-1}/K_n - n\varphi$$

今，$U_1$，$U_2$を次のような$S^n$の開集合とする。

$$U_1 = \left\{ (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n \;\middle|\; x_{n+1} > -\tfrac{1}{2} \right\},$$

$$U_2 = \left\{ (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n \;\middle|\; x_{n+1} < \tfrac{1}{2} \right\}.$$

この２つの開集合は，$S^n$の一つの開被覆を与える。 以下，この開被覆とそれの座標系（$(y_1, \cdots, y_n)$とおく）を固定する。

次に，$S^n$上の関数について，いくつかのノルムを定義しよう． $S^n$上の連続関数$f$に対して

$$\|f\| = \max_{v\in S^n} |f(v)|$$

ある正数$p$，$1<p<\infty$とある正整数$k$に対して，$S^n$上の$C^k$級の関数$f$のノルムを

$$\|f\|_{k,p} = \left\{ \int_{U_1} \sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha f|^p \,dU_1 \right\}^{1/p} + \left\{ \int_{U_2} \sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha f|^p \,dU_2 \right\}^{1/p}$$

で定義する． ここで，$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$，

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y_1^{\alpha_1} \cdots \partial y_n^{\alpha_n}}$$

§2. ［定理の証明］

考える超曲面を$(S^n, X_0)$とおく．

この超曲面の支持関数 $\varphi_0$ は次の2階楕円型微分方程式を満たす。

$$\Delta\varphi + n\varphi = nK_{n-1}/K_n$$

$\varphi_0 = r + \psi_0$ とおく。

そのとき，$\psi_0$ は次の微分方程式を満たす。

$$(2.1) \qquad \Delta\psi + n\psi = n(K_{n-1}/K_n - r)$$

これの同次方程式 $\Delta\psi + n\psi = 0$ の解は，球面調和関数の理論から，一次関数 $\psi = a_1x_1 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1}$ を球面へ制限したものであることがわかっている。

従って，非同次方程式 (2.1) の解は

$$\psi = \psi_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1}$$

で与えられる。

これらの解の中で，同次方程式の解と直交するのは，唯一つで，それは $a_1, \cdots, a_{n+1}$ が次のように与えられるものである。

$$(2.2) \qquad a_1 = \frac{-\int_{S^n} \psi_0 x_1 \, d\omega}{\int_{S^n} x_1^2 \, d\omega}, \quad \cdots\cdots, \quad a_{n+1} = \frac{-\int_{S^n} \psi_0 x_{n+1} \, d\omega}{\int_{S^n} x_{n+1}^2 \, d\omega}$$

そのとき，Banach の定理と，Banach 空間上の Fredholm の理論から，かつ一意的な $\psi$ に対して，その選び方から，次の評価式が得られる。

$$(2.3) \qquad \|\psi\|_{2,p} \leqslant C_1 \| K_{n-1}/K_n - r \|_{0,p}$$

こゝで，$C_1$は $p$ だけに依存する定数である．

次に，Sobolev の不等式から，$p > n/2$ のとき，

$$(2.4) \qquad \|\psi\| \leqslant C_2 \|\psi\|_{2,p}$$

が成り立つ．こゝで，$C_2$ も $p$ だけに依存する定数である．

従って，

$$(2.5) \qquad \|\psi\| \leqslant C_1 C_2 \| K_{n-1}/K_n - r \|_{0,p}$$

が成り立つ。

こゝで，今まで考えた超曲面$(S^n, X_0)$を平行移動した超曲面$(S^n, X)$を考える。

$$X = X_0 - a$$

こゝで，$a = (a_1, \cdots\cdots, a_{n+1})$ で，$a_1, \cdots, a_{n+1}$ は (2.2) で与えられる定数である。

そのとき，その超曲面の支持関数 $\varphi$ は

$$\varphi = r + \psi$$

で与えられる。

不等式 (2.5) から，任意の与えられた正数$\varepsilon$に対して，$\| K_{n-1}/K_n - r \|_{0,p}$ を十分小さくとると，$\|\psi\| < \varepsilon$ がいえる。

従って，

$$r - \varepsilon < \varphi < r + \varepsilon \ .$$

点 $P_1$ を超曲面$(S^n, X)$の点で，原点 O から最長距離にある点

$P_2$を最短距離にある点とする．点$P_1$，$P_2$のとり方から線分$OP_1$，$OP_2$は超曲面と直交している。

従って，

$$|OP_1| = \varphi(\nu_1), \quad |OP_2| = \varphi(\nu_2) .$$

従って，超曲面上の任意の点Pに対して，

$$r - \varepsilon < \varphi(\nu_2) = |OP_2| \leqq |OP| \leqq |OP_1| = \varphi(\nu_1) < r + \varepsilon$$

故に，超曲面$(S^n, X)$は，原点を中心とする半径が$r-\varepsilon$，$r+\varepsilon$の同心球の間に含まれることがわかる。

Q.E.D.

## 参考文献

[1] S.S.Chern : Integral formula for hypersurfaces in euclidean space and their application to uniqueness theorems. J. Math. Mech. 8 (1959), 947−955.

[2] D. Koutroufiotis : Ovaloids which are almost spheres. Comm. Pure Appl. Math. 24 (1971), 289−300.